Analiza stabilității biosistemelor prin metode neconvenționale

Gheorghe FRUNZĂ

1. Introducere

Sistemul reprezintă un ansamblu de elemente sau fenomene între care există anumite relații de interacțiune sau interdependență (Bertalanffy,1942). Pentru cunoaşterea sistemului nu este suficientă analiza elementelor sale componente, ci studiul comportamentului său, adică al relației sale cu mediul. Sistemul care are legături cu exteriorul este un sistem deschis şi relațiile se numesc extrinseci, în caz contrar sistemul este închis iar relațiile între diferite părții sunt denumite intrinseci.

O clasă specială o reprezintă biosistemele. Acestea sisteme au un caracter istoric, informațional, integrabil, autopoietic, dinamic, cibernetic, ierarhic, organizat-structural, fractal, se pot autoregla, au un comportament antientropic, (Botnariuc, 1999). Pe lângă aceste caracteristici biosistemele pot avea şi un caracter aparent haotic, (Poston, 1985).

Primele cercetări matematice asupra stabilității ecosistemelor au fost făcute abia în a doua jumătate a secolului XX, fapt relevat în Tabelul 1.

Tabelul 1. Istoricul studierii stabilității biosistemelor
Table 1. The history of biosystems’ stability study

Anul	Autorul si contribuția sa
1776	Laplace face primele cercetări asupra mişcarilor haotice si enunța principiul determinismului
1900	Aleksandr Liapunov studiază ecuațiile mişcării perturbate
1903	Henri Poincare face noi studii asupra mişcărilor haotice
1955	Mac Arthur dezvoltă matematic problema stabilității biocenozei
1958	Elton a arătat că stabilitatea biocenozei este funcție de complexitatea rețelei trofice
1963	Aleksandrova aplică teoria sistemelor în ecologie

Metodele moderne de analiză a biosistemelor rezultă din însuşirile şi comportamentul lor. Ca urmare se pot menționa metode bazate pe: starea termodinamică (entropia), dinamică neliniară, inteligență artificială (rețele neuronale, algoritmi genetici, logica fuzzy), analiză fractală si multifractală, teoria haosului şi teoria catastrofelor.

Deoarece procesele biologice sunt ireversibile, ele sunt însoțite de producere de entropie şi astfel sistemul alcătuit din organism-mediu evoluează spre creşterea acesteia.

Evoluția unui biosistem conține un act lent de formare a unor edifici moleculare mereu mai complexe din altele mai simple. Viul potențial a fost creditat cu entropie, iar o dată apărut a trebuit sa plătească această datorie prin procese de arderi metabolice, cât şi prin moarte.

Ca urmare, un sistem viu se opune tendinței de echilibru termodinamic, a cărei atingere înseamnă moartea, prin proprietatea de a se elibera de surplusul de entropie pe care, în calitate de sistem material trebuie să-l producă.

Noțiunea de stabilitate provine din mecanică şi a apărut în contextul studierii comportării unui sistem de puncte materiale care este perturbat foarte puțin într-o configurație a sa de echilibru.

2. Modelul matematic generalizat al unui biosistem

Un sistem S poate fi descris de relația:

$$S = F(x, y, s_t, a), \tag{1}$$

unde: x - mulțimea intrărilor; y - mulțimea ieşirilor; s_t - mulțimea stărilor la momentul t; a - mulțimea operațiilor sau transformărilor care se efectuează asupra mulțimii x pentru a le transforma în mulțimea y. Într-un sistem atemporal operațiunile de transformare sunt constante $a_t = a_{t+1}$, iar într-un sistem temporal $a_t \neq a_{t+1}$.

Starea reprezintă cantitatea minimă de informație despre sistem la un moment dat, cu ajutorul căreia se poate determina componenta sistemului dacă se cunoaşte intrarea sa. Trecerea dintr-o stare în alta se face prin intermediul transformărilor. Ecuațiile de stare pot fi de forma:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= f(s_i, x_t) \\ y_t &= g(s_t, x_t) \end{aligned} \tag{2}$$

Măsura complexității sau a cantității de dezordine a unui boisistem care se poate afla în n stări funcționale este dată de relația lui Shanon:

$$H = -k \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i , \tag{3}$$

unde H este entropia sistemului, p_i este probabilitatea ca sistemul să se afle în starea i, iar k este o constantă pozitivă, care indică unitatea de măsură aleasă.
Un biosistem minimal are o structură prezentată în Figura 1 care îi permite menținerea mărimii de ieşire y la valoarea impusă de mărimea de intrare x.

Pentru a realiza acest control, biosistemul trebuie să dispună de un subsitem de elaborare a comenzilor şi un subsistem de execuție care să acționeze în sensul dorit asupra elementului reglat, iar acesta la rândul său trebuie să poată suporta modificările stării sale în sensul dorit.

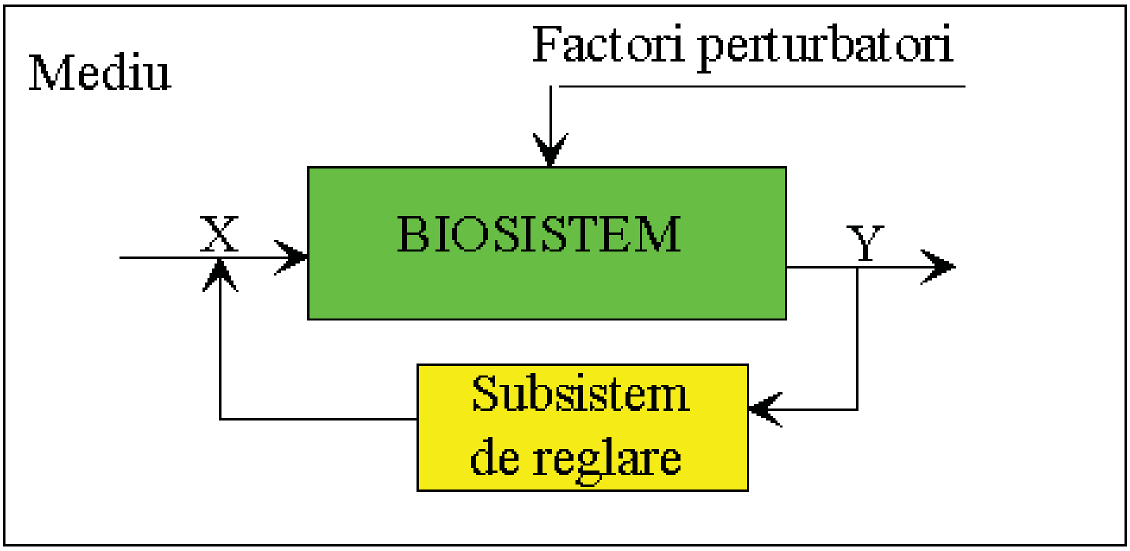

Figura 1. Modelul minimal al unui biosistem
Figure 1. Minimal model of a biosystem

3. Studiul matematic al stabilității ecosistemelor

Ecosistemul reprezintă unitatea organizatorică elementară a ecosferei alcătuită din biotop ocupat de o biocenoză., care este capabilă de realizarea productivității biologice, (Stugren, 1982).

Stabilitatea şi armonia interioară a biocenozei presupune un echilibru între diversele sale componente şi procese. După o părere larg răspândită, stabilitatea ecosistemului este întemeiată pe principiul acțiunii şi reacțiunii, (Botnariuc, 1982).

Orice ecosistem poate fi conceput ca un sistem cibernetic care este legat de mediu printr-un număr de intrări şi ieşiri, Figura 1.

Cu ajutorul teoriei generale a sistemelor se elaborează un model al feedbackului. Prin mărimea de intrare x, pătrund în sistem substanță, energie şi informație. Acestea sunt redate parțial mediului prin mărimea de iesire y, transformând condițiile de existență a biocenozei. Orice perturbare de origine internă sau externă, poate fi înlăturată prin interacțiunea părților ecositemului, prin mecanismele sale proprii, (Botnariuc, 1999).

Dacă la perturbații foarte mici ale condițiilor inițiale corespund evoluții ale ecosistemului care rămân tot timpul în vecinătatea evoluției neperturbate, aceasta este stabilă, în caz contrar dinamica la echilibru este instabilă.

Se consideră $x_i(t), i=\overline{1,n}$ parametrii biosistemului într-o anumită evoluție neperturbată la un moment dat de timp şi $\tilde{x}_i(t), i=\overline{1,n}$ aceeaşi parametrii într-o evoluție perturbată. Aceasta din urmă este stabilă dacă fiind dată o mărime $\varepsilon > 0$, arbitrar de mică, există $\eta = f(\varepsilon, t_0)$, astfel încât inegalitatea $\left|\tilde{x}_i(t_0) - x_i(t_0)\right| < \eta$ sa implice inegalitatea $\left|\tilde{x}_i(t) - x_i(t)\right| < \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$, la orice momentul $t \geq t_0$.

Se admite că variabilele $\tilde{x}_i(t), i = \overline{1, n}$ satisfac un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, de tip Hamilton, (Voinea, 2000).

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = F_i(\tilde{x}_i(t), t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Aceste ecuaţii arată faptul că dinamica fiecărui element al biosistemului este rezultatul interacţiunii tuturor celorlalte elemente.

Funcţiile $x_i(t), i = \overline{1, n}$ fiind un sistem de soluţii pentru ecuaţiile (4), rezultă:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i[x_i(t), t], \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Dacă se fac schimbările de funcţii:

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + y_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

rezultă:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Prin scăderea ecuaţiilor (7) şi (8), se obţine:

$$\frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} = F_i[\tilde{x}_i(t)] - F_i[x_i(t)], \quad i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Dacă se ţine seama de relaţiile (6) şi (7), sistemul de ecuaţii (8) devine:

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i[x_i(t) + y_i, t] - F_i[x_i(t), t]. \tag{9}$$

Prin sistemul de ecuaţii (9) se arată faptul că stabilitatea biosistemului depinde de stabilitatea relaţiilor reciproce între elementele sale.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (9) admite evident soluţia $y_i = 0, i = \overline{1, n}$, care poate fi interpretată ca o configuraţie de echilibru. Acest sistem este denumit sistem de ecuaţii al evoluţiei perturbate.

Prin trecerea de la sistemul (4) la sistemul (9) problema stabilității evoluției se reduce la studiul configurației de echilibru, (Voinea, 2000).

Considerațiile de mai sus arată că nu se restrânge cu nimic generalitatea dacă se presupune că sistemul de ecuații (5) admite soluția $\tilde{x}_i = 0, i = \overline{1,n}$ şi dacă se studiază stabilitatea acestei soluții, (Voinea, 2000). Ca urmare, definițiile date de Liapunov pentru stabilitatea mişcării pot fi extinse şi asupra evoluției biosistemelor.

Primele două definiții pot fi aplicate în cazul în care biosistemul este perturbat de variații climaterice, variații în dinamica populațiilor sau de acțiunea omului.

Se cunoaşte că variațiile importante ale condițiilor climaterice sunt funcții periodice de timp. Succesiunea anotimpurilor sau alternanța zi-noapte reprezintă fenomene ce determină evoluții periodice ale biosistemelor (migrațiile speciilor, ciclurile vegetale etc.). Ultimele două definiții date de Liapunov pot fi aplicate cu succes pentru biosisteme care sunt perturbate de variații ale prioadei anotimpurilor.

Din ecuațiile (4) şi (9) şi definițiile date de Liapunov rezultă faptul că stabilitatea ecosistemului creşte odată cu mărirea numărului de stări funcționale posibile ale sistemului, deci stabilitatea unui sistem este cu atât mai mare cu cât gradul său de complexitate este mai mare, problema afirmată şi de (Botnariuc, 1999).

Totuşi biosistemele pot fi considerate sisteme nelineare. Studiul stabilității acestora se poate realiza cu ajutorul teoremelor lui Liapunov şi a teoremei lui Cetaiev.

4. Problema stabilității lanțului trofic a unei biocenoze

Ținând cont de considerațiile de mai sus se poate modela matematic stabilitatea unei biocenoze având în vedere numărul de specii şi relațiile reciproce, considerând factorii biotopului constanți. Fie **n** numărul de specii dintr-o biocenoză şi x_i, $i = \overline{1,n}$ populația fiecărei specii.

Într-un biosistem unele specii constituie hrana altora şi deci nici o populație nu este constantă în timp, adică:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} \neq 0,\ i = \overline{1,n} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}_1}{dt} = a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n \\ \dfrac{d\tilde{x}_2}{dt} = a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + \dots + a_{2n}\tilde{x}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\tilde{x}_n}{dt} = a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + \dots + a_{nn}\tilde{x}_n \end{cases} \tag{11}$$

În ecuațiile (4) presupunem că $F_1, F_2, \dots, F_n$ se pot dezvolta în serie şi se rețin numai termenii de ordin întâi şi în final obținem:

Sistemul de ecuații (11) se poate integra prin metode cunoscute, dacă se caută soluții de forma $\tilde{x}_i = C_i \exp(rt),\ i = \overline{1,n}$. Înlocuind aceste soluții în sistemul de ecuații (11), rezultă:

$$\begin{cases} (a_{11} - r)C_1 + a_{12}C_2 + \dots + a_{1n}C_n = 0 \\ a_{21}C_1 + (a_{22} - r)C_2 + \dots + a_{2n}C_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + \dots + (a_{nn} - r)C_n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Pentru ca acest sistem să admită soluții distincte şi nenule este necesar ca determinantul coeficienților să fie nul,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \dots\dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots\dots\dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0 . \tag{11}$$

Prin dezvoltare determinantului Δ, se obține:

$$\Delta = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n, \quad a_i \in R,\ i = \overline{0,n} \tag{12}$$

4.1. Discuție

Soluțiile sistemului sunt prezentate şi discutate în Tabelul 2

Se poate dovedi matematic că în majoritatea cazurilor biocenozele bogate în specii sunt mai stabile decât cele mai puțin diversificate.

Cu ajutorul ecuațiile de mai sus se poate pune în evidență faptul că stabilitatea ecosistemului creşte odată cu mărirea numărului de puncte de contact între lanțurile trofice, problema afirmată şi de (Botnariuc, 1982, 1999)

Tabelul 2. Discuția soluțiilor
Table 2. Solutions debate

Posibilitățiii	Forma matematica a soluției $\tilde{x}_i$	Stabilitatea soluției
Dacă $r \in R$	$\tilde{x} = A\exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} A\exp(-\alpha t) = 0$	soluția este stabilă
Dacă $r \in C, \mathrm{Re}(r) < 0$	$\tilde{x} = A\exp(-\alpha t)\cos(\beta t - \varphi)$, $\beta > 0$ iar $\lim\limits_{t\to\infty} A\exp(\beta t - \varphi) = 0$	configurația de echilibru este asimptotic stabilă.
Dacă $r \in C, \mathrm{Re}(r) = 0$	$\tilde{x} = C\cos(\beta t - \varphi)$ iar $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{x} \neq 0$ dar are o valoare mărginită	soluția este simplu stabilă
Dacă $r \in R_+$	$\tilde{x} = A\exp(\alpha t)$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} x = \infty$	soluția este instabilă

5. Evoluții haotice. Atractori.

Se consideră sistemul de ecuații (4) şi se presupune $\tilde{x}_i,\ i=\overline{1,n}$ că sunt parametrii unui ecosistem reprezentat printr-un punct P într-un spațiu n-dimensional, R^n. Se notează $\tilde{x}_i(t),\ i=\overline{1,n}$ soluțiile sistemului de ecuații diferențiale care corespund condițiilor inițiale $\tilde{x}_i(0)=x_i^0,\ i=\overline{1,n}$.

Se presupune în continuare că punctul $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ aparține unei mulțimi de puncte D din R^n şi că pentru $t \to \infty$ soluțiile $\tilde{x}_i(t),\ i=\overline{1,n}$ tind către o mulțime de puncte A. Se spune că mulțimea A este **atractor** pentru soluțiile care pornesc din mulțimea D. Mulțimea A poate fi un punct, o elipsă, o curbă pe un tor, o suprafață etc.

Elementele unui ecosistem pot avea în timp o evoluție haotică, ce nu poate fi descrisă prin modele matematice clasice. În cazul evoluțiilor haotice există un atractor caracteristic, denumit atractor straniu (strange atractor) cu **structură de fractal**. Astfel de evoluții sun sensibile la condițiile inițiale.

Considerând modelul descris prin sistemul de ecuații diferențiale (4), este posibil ca la un set de valori pentru parametrii biosistemului dinamic, acesta sa aibă o comportare regulată, iar pentru un alt set de valori să aibă o comportare haotică.

În cadrul ecosistemelor acțiunea omului are un rol deosebit. Micile perturbări produse de om pot fi amortizate uneori prin funcția de autoreglare, iar efectele sunt foarte mici, evoluția sistemului fiind în acest caz stabilă. Poluarea continuă şi accentuată a ecosistemelor produce o instabilitate globală a biosferei.

Ecosistemele complexe pot rezista timp îndelungat în mediul în care au evoluat, dar sunt lipsite de rezistență față de perturbările violente produse de om.

6. Concluzii

Noțiunea de sistem are un caracter relativ, în sensul că orice sistem poate fi descompus în subsisteme şi la rândul său poate fi considerat ca un subsistem al unui sistem complex.

Stabilitatea biosistemelor reprezintă o problemă care se află la granița dintre mecanică, matematică, fizică, biologie şi ecologie.

Primele cercetări asupra acestei probleme au fost făcute în a doua jumătate a secolului XX.

Stabilitatea oricărui biosistem haotic poate fi analizată liniarizând sistemul de ecuații diferențiale în jurul punctului staționar şi apoi vizând ce se întâmplă la schimbării mici ale stării staționare în timp.

Biosistemele sunt cu atât mai stabile cu cât au un grad de complexitate mai mare. Biosistemele pot deveni di stabile – instabile, din deterministe – haotice, din liniare – neliniare, ciclice şi uneori catastrofale cu caracter multifractal.

Fractalii, teoria catastrofelor şi metodele numerice de simulare reprezintă noi direcții de cercetare în acest domeniu.

Bibliografie

Botnariuc N., Vădineanu A., 1982, Ecologie, Editura Didactică şi Pedagogică 440p

Botnariuc, N., 1999 Evoluția sistemelor biologice supraindividuale, Editura Universității din Bucureşti 205p

Stugren B., 1982,Bazele ecologiei generale, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică 287p

Poston, T., Stewart, I., 1985 Teoria catastrofelor şi aplicațiile ei, Editura tehnică, Bucureşti 436p

Voinea R., Stroie, V.I, 2000, Introducere in teoria sistemelor dinamice; Editura Academiei Române, Bucureşti 459p

Abstract

Biosystem Stability Analysis Using Nonconventional Methods

This paper approaches biosystem stability through a modern perspective, by combining a series of theories pertaining to the fields of Physics, Mathematics, Biology, and Ecology.

The Mathematical approach employs Liapunov-type differential equation systems applied to biosystems under perturbing conditions. The results are then analyzed by means of fractal and chaos theories.

Keywords: dynamical biosystems, entropy, fractal, chaos

Conf . univ. dr. ing. ec. Gheorghe FRUNZĂ,
Universitatea ,,Ştefan cel Mare” Suceava,
Facultatea de Silvicultură,
frunza@fim.usv.ro